**Objetivos a cubrir** **Código : MAT-CDI.1**

- Conjunto de loa números reales. Leyes de los números reales.
- Conectores lógicos. Proposiciones y demostraciones
- Resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- Valor absoluto. Resolución de ecuaciones e inecuaciones con valores absolutos.

**Ejercicios resueltos**

**Ejemplo 1** *: Traduzca las siguientes expresiones verbales a expresiones numéricas*

1. *La diferencia de un número par y de un número impar.*
2. *La quinta parte de la edad de Pedro sumada con el triple de la edad de Luis.*
3. *La edad de Pedro más la mitad de la edad de Luis es cien.*
4. *El triple de la suma de un número y diez es igual a doce.*

**Solución :** 1. Sean

$$x: \quad \text{un número par cualquiera}$$

$$y: \quad \text{un número impar cualquiera}$$

Es conocido que los números pares vienen expresados como $x = 2n$, con $n \in \mathbb{Z}$, mientras que los números impares se expresan como $y = 2m + 1$ ó como $y = 2m - 1$, con $m \in \mathbb{Z}$. Es de hacer notar que $n$ no tiene que ser igual a $m$.

Luego, la expresión

"La diferencia de un número par y de un número impar"

se escribe matemáticamente como

$$2n - (2m - 1), \qquad \text{con} \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

que es equivalentemente a escribir

$$2k + 1, \qquad \text{donde} \quad k = n - m \in \mathbb{Z}$$

2. Sean

$$x: \quad \text{la edad de Pedro}$$

$$y: \quad \text{la edad de Luis}$$

Luego, la expresión

"La quinta parte de la edad de Pedro sumada con el triple de la edad de Luis"

se escribe matemáticamente como

$$\frac{x}{5} + 3y.$$

3. Sean

$$x: \quad \text{la edad de Pedro}$$

$$y: \quad \text{la edad de Luis}$$

Luego, la expresión

"La edad de Pedro más la mitad de la edad de Luis es cien"

se escribe matemáticamente como

$$x + \frac{y}{2} = 100.$$

4. Sean

$$x: \quad \text{un número cualquiera}$$

Luego, la expresión

"El triple de la suma de un número y diez es igual a doce"

se escribe matemáticamente como

$$3\,(x + 10) = 12.$$

★

**Ejemplo 2** *: Simbolizar las siguientes proposiciones*

1. *"5 no es primo o no es impar".*
2. *"Si $2 + 3 < 6$ entonces $2 < 3$".*
3. *"4 es divisible por 2 si y solo si 4 es par".*
4. *"3 es primo y 5 es impar o primo".*
5. *"Francisco Sanchez es nadador o es tenista".*

**Solución :** 1. Sean

$$\text{p}: \quad \text{5 es un número primo}$$

$$\text{q}: \quad \text{5 es un número impar}$$

Luego, la proposición

"5 no es primo o no es impar"

se simboliza por

$$\overline{\text{p}} \vee \overline{\text{q}}.$$

2. Sean

$$\text{p}: \quad 2 + 3 < 6$$

$$\text{q}: \quad 2 < 3$$

Luego, la proposición

"Si $2 + 3 < 6$ entonces $2 < 3$"

se simboliza por

$$\text{p} \longrightarrow \text{q}.$$

3. Sean

$$\text{p}: \quad 4 \text{ es divisible por } 2$$

$$\text{q}: \quad 4 \text{ es un número par}$$

Luego, la proposición

"4 es divisible por 2 si y solo si 4 es par" se simboliza por

$$\mathrm{p} \longleftrightarrow \mathrm{q}.$$

4. Sean

$$\mathrm{p}: \quad 3 \text{ es un número primo}$$

$$\mathrm{q}: \quad 5 \text{ es un número primo}$$

$$\mathrm{r}: \quad 5 \text{ es un número impar}$$

Luego, la proposición

“3 es primo y 5 es impar o primo”

se simboliza por

$$\mathrm{p} \wedge (\mathrm{r} \vee \mathrm{q}) .$$

5. Sean

$$\mathrm{p}: \quad \text{Francisco Sanchez es nadador}$$

$$\mathrm{q}: \quad \text{Francisco Sanchez es tenista}$$

Luego, la proposición

“Francisco Sanchez es nadador o es tenista”

se simboliza por

$$\mathrm{p} \vee \mathrm{q}.$$

★

**Ejemplo 3** *: Demuestre que si* $a<0$*,* $b<0$ *y* $a<b$*, entonces* $a^2>b^2$*.*

**Demostración :** Observemos que si

$$\mathrm{p} : a<0 \qquad \mathrm{q} : b<0 \qquad \mathrm{r} : a<b \qquad \mathrm{w} : a^2>b^2$$

entonces, simbólicamente se tiene

$$\mathrm{p} \wedge \mathrm{q} \wedge \mathrm{r} \longrightarrow \mathrm{w}$$

así, usando las hipótesis son “p”, “q” y “r”, debemos demostrar la tesis “w”.

Partimos de la hipótesis “r”, como

| | |
|---|---|
| $a<b$ | (Hipótesis “r”) |
| | Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por $a$, |
| $\downarrow$ | como $a$ es negativa (Hipótesis “p”) la desigualdad cambia |
| | (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales) |
| $a^2>ab$ | (Desigualdad I) |

por otro lado, podemos hacer las mismas operaciones, pero esta vez multiplicando por $b$

| | |
|---|---|
| $a<b$ | (Hipótesis “r”) |
| | Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por $b$, |
| $\downarrow$ | como $b$ es negativa (Hipótesis “q”) la desigualdad cambia |
| | (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales) |
| $ab>b^2$ | (Desigualdad II) |

Entonces, tenemos

$$a^2 > ab \qquad \text{y} \qquad ab > b^2$$

por la propiedad transitiva de orden de los números reales

$$a^2 > b^2,$$

con lo que concluimos que si $a < 0$, $b < 0$ y $a < b$, entonces $a^2 > b^2$. ★

**Ejemplo 4** *: El número* $\sqrt{ab}$ *se llama la* **media geométrica** *de dos números positivos* $a$ *y* $b$*. Pruebe que*

$$a < b \qquad \textit{implica que} \qquad a < \sqrt{ab} < b$$

**Demostración :** Observemos que si

$$\text{p} \ : \ a > 0 \qquad \text{q} \ : \ b > 0 \qquad \text{r} \ : \ a < b \qquad \text{w} \ : \ a < \sqrt{ab} < b$$

entonces, simbólicamente se tiene

$$\text{p} \wedge \text{q} \wedge \text{r} \longrightarrow \text{w}$$

así, usando las hipótesis son "p", "q" y "r", debemos demostrar la tesis "w".

Partimos de la hipótesis "r", como

$a < b$ (Hipótesis "r")

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por $a$, como $a$ es positiva (Hipótesis "p") la desigualdad **no** cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$a^2 < ab$

$\downarrow$ Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad, la misma cambia pues la aplicación $\sqrt{(\cdot)}$ mantiene desigualdades (ver ejercicio 19)

$|a| < \sqrt{ab}$

Como $a$ es positiva (Hipótesis "p"), se tiene que $|a| = a$

$a < \sqrt{ab}$ (Desigualdad I)

por otro lado, podemos hacer las mismas operaciones, pero esta vez multiplicando por $b$

$a < b$ (Hipótesis "r")

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por $b$, como $b$ es positiva (Hipótesis "q") la desigualdad **no** cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$ab < b^2$

$\downarrow$ Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad, la misma cambia pues la aplicación $\sqrt{(\cdot)}$ mantiene desigualdades (ver ejercicio 19)

$\sqrt{ab} < |b|$

Como $b$ es positiva (Hipótesis "q"), se tiene que $|b| = b$

$\sqrt{ab} < b$ (Desigualdad II)

Entonces, tenemos

$$a < \sqrt{ab} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{ab} < b$$

con lo que concluimos que si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, entonces $a < \sqrt{ab} < b$. ★

**Ejemplo 5** *: Demuestre que*

$$|x| \leq 2 \qquad \textit{implica que} \qquad \left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 15$$

**Demostración :** Por propiedades de valor absoluto

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| = \frac{\left|x^2+2x+7\right|}{\left|x^2+1\right|},$$

como que $x^2+1$ es una expresión positiva, tenemos que

$$\left|x^2+1\right| = x^2+1$$

así,

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| = \frac{\left|x^2+2x+7\right|}{\left|x^2+1\right|} = \frac{\left|x^2+2x+7\right|}{x^2+1}.$$

Por otro lado

$$x^2+1 \geq 1 \qquad \longleftarrow \text{¿Por qué?}$$

aplicamos $\dfrac{1}{(\cdot)}$ a la desigualdad, como esta aplicación cambia desigualdades (ver ejercicio 20), obtenemos

$$x^2+1 \geq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

así

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| = \frac{\left|x^2+2x+7\right|}{x^2+1} \leq \left|x^2+2x+7\right|$$

por desigualdad triangular

$$\left|x^2+2x+7\right| \leq \left|x^2\right| + |2x| + 7 = x^2 + 2|x| + 7, \qquad \text{es decir,} \qquad \left|x^2+2x+7\right| \leq x^2 + 2|x| + 7$$

del hecho que $|x| \leq 2$ se concluye que

$$\left|x^2+2x+7\right| \leq x^2 + 2|x| + 7 \leq 4 + 2(2) + 7 = 15.$$

Luego

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq \left|x^2+2x+7\right| \leq 15, \qquad \text{es decir,} \qquad \left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 15.$$

★

**Ejemplo 6** *: Hallar el conjunto solución de*

$$\frac{x^2+4x-5}{2x^2+1} > 1$$

**Solución :** Tenemos

$$\frac{x^2+4x-5}{2x^2+1} > 1 \Longrightarrow \frac{x^2+4x-5}{2x^2+1} - 1 > 0 \Longrightarrow \frac{x^2+4x-5-\left(2x^2+1\right)}{2x^2+1} > 0 \Longrightarrow \frac{4x-6-x^2}{2x^2+1} > 0$$

Buscamos la raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

$$4x-6-x^2=0 \Longrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(-1)(-6)}}{2(-1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-24}}{2(-1)} \Longrightarrow \text{raíz imaginaria}$$

$$2x^2+1=0 \Longrightarrow x=\frac{0\pm\sqrt{(0)^2-4(2)(1)}}{2(4)}=\frac{\pm\sqrt{-8}}{2(-1)} \Longrightarrow \text{raíz imaginaria}$$

Estudiamos el signo

| | $(-\infty,\infty)$ |
|---|---|
| $4x-6-x^2$ | $-$ |
| $2x^2+1$ | $+$ |
| | $-$ |

Luego la desigualdad no tiene solución. ★

**Ejemplo 7** *: Hallar el conjunto solución de*

$$\frac{x+2}{x-5}\leq\frac{x}{x+3}$$

**Solución :** Tenemos

$$\frac{x+2}{x-5}\leq\frac{x}{x+3} \Longrightarrow \frac{x+2}{x-5}-\frac{x}{x+3}\leq 0 \Longrightarrow \frac{(x+2)(x+3)-x(x-5)}{(x-5)(x+3)}\leq 0 \Longrightarrow \frac{10x+6}{(x-5)(x+3)}\leq 0$$

Buscamos la raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

$$10x+6=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=-\frac{3}{5}$$

$$(x-5)(x+3)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=5 \quad \text{y} \quad x=-3$$

Estudiamos el signo

| | $(-\infty,-3)$ | $\left(-3,-\frac{3}{5}\right)$ | $\left(-\frac{3}{5},5\right)$ | $(5,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $10x+6$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+5$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Luego la solución es

$$x\in(-\infty,-3)\bigcup\left[-\frac{3}{5},5\right)$$

★

**Ejemplo 8** *: Hallar el conjunto solución de*

$$\frac{\left|x^2+x+1\right|}{5x-1}<0$$

**Solución :** Es conocido que un cociente es negativo si el numerador y denominador tienen signo contrario, en vista que la expresión valor absoluto es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x-1<0$, despejamos $x$ y se tiene que $x<\frac{1}{5}$, por lo que la solución es

$$x\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$$

★

**Ejemplo 9** *: Hallar el conjunto solución de*

$$\left|\frac{2-3x}{1+2x}\right| \leq 4$$

**Solución :** Tenemos, por definición de valor absoluto, que

$$\left|\frac{2-3x}{1+2x}\right| \leq 4 \qquad \Longrightarrow \qquad -4 \leq \frac{2-3x}{1+2x} \leq 4,$$

es decir, tenemos dos desigualdades a resolver

Desigualdad I

$$-4 \leq \frac{2-3x}{1+2x}$$

$$0 \leq \frac{2-3x}{1+2x} + 4$$

$$0 \leq \frac{2-3x+4(1+2x)}{1+2x}$$

$$0 \leq \frac{6+5x}{1+2x}$$

$$\text{Raíces :} \quad x = -\frac{6}{5}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

Estudiamos el signo

| | $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right)$ | $\left(-\frac{6}{5},-\frac{1}{2}\right)$ | $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $5x+6$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $2x+1$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| | $+$ | $-$ | $+$ |

$$\text{sol}_1 : x \in \left(-\infty,-\frac{6}{5}\right) \bigcup \left(-\frac{1}{2},\infty\right)$$

Desigualdad II

$$\frac{2-3x}{1+2x} \leq 4$$

$$\frac{2-3x}{1+2x} - 4 \leq 0$$

$$\frac{2-3x-4(1+2x)}{1+2x} \leq 0$$

$$\frac{-2-11x}{1+2x} \leq 0$$

$$\text{Raíces :} \quad x = -\frac{2}{11}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

Estudiamos el signo

| | $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ | $\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{11}\right)$ | $\left(-\frac{2}{11},\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $-11x-2$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $2x+1$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| | $-$ | $+$ | $-$ |

$$\text{sol}_2 : x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{2}{11},\infty\right)$$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_{\text{F}} = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 = \left(-\infty,-\frac{6}{5}\right) \bigcup \left(-\frac{2}{11},\infty\right)$$

★

**Ejemplo 10** *: Hallar el conjunto solución de*

$$|2x+4| - |x-1| \leq 4$$

**Solución :** Por la definición de valor absoluto tenemos que la recta real se secciona en

| $(-\infty,-2)$ | $[-2,1)$ | $[1,\infty)$ |
|---|---|---|
| $-(2x+4)$ | $2x+4$ | $2x+4$ |
| $-(x-1)$ | $-(x-1)$ | $x-1$ |

Caso I : Intervalo $(-\infty,-2)$.

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4 \quad \text{nos queda} \quad -(2x+4)-(1-x)\leq 4$$

resolviendo

$$-(2x+4)-(1-x)\leq 4 \Longrightarrow -x\leq 9 \Longrightarrow x\geq 9$$

entonces

$$\text{sol}_1=[-9,\infty)\bigcap(-\infty,-2)=[-9,-2)$$

Caso II : Intervalo $[-2,1)$.

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4 \quad \text{nos queda} \quad 2x+4-(1-x)\leq 4$$

resolviendo

$$2x+4-(1-x)\leq 4 \Longrightarrow 3x\leq 1 \Longrightarrow x\leq \frac{1}{3}$$

entonces

$$\text{sol}_2=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\bigcap[-2,1)=\left[-2,\frac{1}{3}\right)$$

Caso III : Intervalo $[1,\infty)$.

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4 \quad \text{nos queda} \quad 2x+4-(x-1)\leq 4$$

resolviendo

$$2x+4-(x-1)\leq 4 \Longrightarrow x\leq -1$$

entonces

$$\text{sol}_3=(-\infty,-1]\bigcap[1,\infty)=\emptyset$$

Luego la solución final es

$$\text{sol}_F=\text{sol}_1\bigcup\text{sol}_2\bigcup\text{sol}_3=[-9,-2)\bigcup\left[-2,\frac{1}{3}\right)\bigcup\emptyset=\left[-9,\frac{1}{3}\right)$$

★

**Ejercicios**

1. Coloque dentro del paréntesis una $V$ si la proposición es verdadera o una $F$ si es falsa

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $-\sqrt{4}\in\mathbb{N}$ | ( ) | 2. | $\pi\in\mathbb{Q}$ | ( ) |
| 3. | $\pi=3,14$ | ( ) | 4. | $3+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ | ( ) |
| 5. | $\dfrac{4}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{8}{3}$ | ( ) | 6. | $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=-1$ | ( ) |
| 7. | $\dfrac{-3}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}-2}$ | ( ) | 8. | $5-\dfrac{6}{9}=\dfrac{14}{3}=\dfrac{15-14}{3}=\dfrac{1}{3}$ | ( ) |
| 9. | $\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{9}=3$ | ( ) | 10. | $10-(7-3)=(7-3)-10$ | ( ) |
| 11. | $2^3\cdot 3^2=6^3$ | ( ) | 12. | $(16\div 8)\div 2=16\div(8\div 2)$ | ( ) |
| 13. | $2^6+8^2=10^8$ | ( ) | 14. | $5-(8-3)=-(-3+8)+5$ | ( ) |
| 15. | $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b$ | ( ) | 16. | $\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1}}\right)^4}=3+2\sqrt{2}$ | ( ) |

2. Factorizar las siguientes expresiones

1. $x^2y + y - x^2 - 1$ 2. $z^3 + zy - xy - xz^2$ 3. $ab - a^2 - 2abx + 2a^2x$

4. $3x^3 - xy + x^2 - 3x^2y$ 5. $a^2 + ab - 2az - bz + z^2$ 6. $ac - 2a + a^2 - 2b - ab - 2c$

7. $xy - x - y + y^2$ 8. $x - xy - y - zx - z + x^2$ 9. $3mp - n + m^2 - nm + m - 3np$

10. $ax^2 - bx^2 + 2axy - 2bxy + ay^2 - by^2$ 11. $a^2b - 3a^2 + 2ab^2 - 6ab + b^3 - 3b^2$

12. $6x + x^2 + 9$ 13. $4x^2 - 4x + 1$ 14. $2x^2 + 4x + 2$ 15. $x^2 - y^2 + 6x + 9$

16. $a^4 - x^2 + 2x - 1$ 17. $z - z^2 + 2$ 18. $y^4 - x^2 + 6x - 9$ 19. $y^2 - 5y - 24$

20. $w^2 - 9$ 21. $x^2 - 2$ 22. $x^3 - 1$ 23. $x^3 + 1$ 24. $x^2 + x^4 + 1$

25. $4 - z^4$ 26. $x^4 - 5x^2 + 6$ 27. $x^4 - 4x^2 + 4$ 28. $x^4 - 4x^2 + 4x - 1$

29. $y^5 - 1$ 30. $z^5 + 32$ 31. $z^5 - 32$ 32. $x^5 + \dfrac{1}{2}$ 33. $8 - x^6 - 7x^3$

34. $\dfrac{x^3}{8} - 27$ 35. $\dfrac{x^6}{8} - 27$ 36. $x^2 - 7x + 2$ 37. $x^4 - x^3 - x^2$ 38. $x^7 - 1$

3. Efectúe las operaciones indicadas y simplifique

1. $\dfrac{2+8x}{2}$ 2. $\dfrac{9b-6}{3b}$ 3. $\dfrac{xy}{3} + \dfrac{xy}{6}$ 4. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$ 5. $u + 1 + \dfrac{u}{u+1}$

6. $\dfrac{a}{bc} \div \dfrac{b}{ac}$ 7. $\dfrac{x/y}{z}$ 8. $\dfrac{x - x/y}{x + x/y}$ 9. $\dfrac{1}{x+5} + \dfrac{2}{x-3}$ 10. $\left(\dfrac{-2r}{s}\right)\left(\dfrac{s^2}{-6t}\right)$

11. $\dfrac{5x-10}{x^2-4x+4} \cdot \dfrac{a^2x + 2a^2}{2a^2}$ 12. $\dfrac{2x + 1/x}{2x^2}$ 13. $\dfrac{2}{a^2} - \dfrac{3}{ab} + \dfrac{4}{b^2}$ 14. $\dfrac{x + 2 - 35/x}{1 + 9/x + 14/x^2}$

15. $1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}$ 16. $\dfrac{1 - \dfrac{a^2}{b^2}}{1 - \dfrac{a}{b}}$ 17. $\dfrac{1 + \dfrac{1}{c-1}}{1 - \dfrac{1}{c-1}}$ 18. $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x}}$ 19. $2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}}}$

20. $(0,4)^4 \cdot \left(\dfrac{4}{25}\right)^{-3}$ 21. $\dfrac{2}{1 + \dfrac{2}{2 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{2}}}}$ 22. $\dfrac{1 - 3^{-2}}{1 + 2^{-3}} + \dfrac{2^{-1} + 3^{-1}}{-2^{-2}}$ 23. $\dfrac{6}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{4}}} - 5$

4. Despejar en cada una de las siguientes ecuaciones la variable señalada entre parentesis

1. $s = \dfrac{bh}{2}$ ; $(h)$ 2. $L = 2\pi R$ ; $(R)$ 3. $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ ; $(h)$ 4. $F = \dfrac{m_1 m_2 k}{d^2}$ ; $(m_1)$

5. $V = at$ ; $(a)$ 6. $v_c = v_a R$ ; $(v_a)$ 7. $c^2 = a^2 + b^2$ ; $(a)$ 8. $a = \dfrac{v_f - v_0}{t}$ ; $(v_0)$

9. $T = Fd$ ; $(F)$ 10. $P = FV$ ; $(F)$ 11. $F_c = mRv_a^2$ ; $(R)$ 12. $h_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$ ; $(v_0)$

13. $h = \dfrac{gt^2}{2}$ ; $(g)$

14. $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$ ; $(d_1)$

15. $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{d_2}{d_1}$ ; $(v_2)$

16. $\dfrac{v_1 P_1}{T_1} = \dfrac{v_2 P_2}{T_2}$ ; $(T_2)$

17. $P = hdg$ ; $(h)$

18. $P = \dfrac{Fd}{t}$ ; $(d)$

19. $s = \dfrac{(B+b)\,h}{2}$ ; $(b)$

20. $v_f^2 = v_0^2 + 2gd$ ; $(d)$

21. $V = IR$ ; $(I)$

22. $v_a = \dfrac{2\pi N}{T}$ ; $(T)$

23. $Q = 0,24 I^2 Rt$ ; $(t)$

24. $R_t = R_0\,(l - \epsilon t)$ ; $(\epsilon)$

25. $v = \dfrac{d}{t}$ ; $(t)$

26. $E_c = \dfrac{mv^2}{2}$ ; $(v)$

27. $P = 2\,(b+h)$ ; $(b)$

28. $d = v_0 t + \dfrac{gt^2}{2}$ ; $(v_0)$

29. $A = \dfrac{Dd}{2}$ ; $(d)$

30. $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$ ; $(R)$

31. $I = \dfrac{E}{R_\epsilon - R_i}$ ; $(R_i)$

32. $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{F_1} + \dfrac{1}{F_2}$ ; $(F_2)$

33. $V = lah$ ; $(l)$

34. $I = \dfrac{CRt}{100}$ ; $(t)$

35. $F = \dfrac{9c}{5} + 32$ ; $(c)$

36. $s = \dfrac{(a_n - a_1)\,n}{2}$ ; $(a_1)$

37. $R = \dfrac{\rho}{s}$ ; $(s)$

38. $E = \dfrac{kq}{R^2}$ ; $(R)$

39. $y = mx + b$ ; $(m)$

40. $T - m_2 a = m_1 a$ ; $(a)$

41. $a_n = a_1 + (n-1)\,R$ ; $(n)$

42. $S = S_0\,(1 + 2\alpha \triangle t)$ ; $(\triangle t)$

43. $E = mgh + \dfrac{mv^2}{2}$ ; $(m)$

44. $\overline{x}_T = \dfrac{N_1 \overline{x_1} + N_2 \overline{x_2}}{N_1 + N_2}$ ; $(\overline{x_2})$

45. $\triangle E_c = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$ ; $(m)$

46. $L_T = L_0\,(1 + \delta \triangle t)$ ; $(\delta)$

47. $F = ma$ ; $(a)$

48. $v = v_0\,[1 + 3\alpha\,(T_2 - T_1)]$ ; $(T_2)$

49. $\omega = i^2 t\,(R_\epsilon + R_i)$ ; $(R_i)$

50. $F \cdot (t_2 - t_1) = m\,(v_2 - v_1)$ ; $(v_1)$

51. $m_2 c_2\,(t - t_1) = m_1 c_1\,(t - t_1) + C\,(t - t_1)$ ; $(t_1)$

5. Calcular en cada caso el valor de la variable pedida a partir de los datos que se dan

   1. $b^2 - 4ac = 49$ ; $b = 3$ ; $a = 1$ ; $c = ?$

   2. $C = \dfrac{5\,(F - 32)}{9}$ ; $C = -35$ ; $F = ?$

   3. $A = 3x + b$ ; $A = -13$ ; $x = -5$ ; $b = ?$

   4. $B = \dfrac{-5x - b}{3}$ ; $B = \dfrac{-1}{9}$ ; $b = 2$ ; $x = ?$

   5. $S = \dfrac{a_n R - a_1}{R - 1}$ ; $S = 121$ ; $a_n = 81$ ; $a_1 = 1$ ; $R = ?$

   6. $V = \pi r^2 h$ ; $V = 1256$ ; $pi = 3,14$ ; $h = 10$ ; $r = ?$

   7. $a_n = R^{n-1} a_1$ ; $a_n = \dfrac{3}{16}$ ; $R = \dfrac{1}{2}$ ; $n = 5$ ; $a_1 = ?$

   8. $d = v_0 \cdot t + \dfrac{at^2}{2}$ ; $d = 30$ ; $v_0 = 10$ ; $t = 2$ ; $a = ?$

   9. $M = l_i + \left(\dfrac{0,5N - F_1}{F_2}\right) \cdot c$ ; $M = 5$ ; $l_i = 4$ ; $F_1 = 10$ ; $F_2 = 15$ ; $c = 3$ ; $N = ?$

   10. $V_1 \cdot P_1 \cdot T_2 = V_2 \cdot P_2 \cdot T_1$ ; $V_1 = 80$ ; $V_2 = 66,6$ ; $P_1 = 690$ ; $P_2 = 760$ ; $T_1 = 298$ ; $T_2 = ?$

6. Traduzca las siguiente expresiones verbales a expresiones numéricas

   1. El triple de un número impar.
   2. La diferencia de un número par y de un número impar.
   3. La división por tres del doble de un número más décima parte.

4. La edad de Pedro hace cuatro años.
5. El cuadruplo de la edad de Pedro dentro de ocho años.
6. El quintuplo de la mitad de la edad de Pedro.
7. La tercera parte de la diferencia de las edades de Pedro y Luis.
8. La mitad de la suma de la edad de Pedro dentro de cinco años y la de Luis hace ocho años.
9. Al sumar doce de un número el resultado es un tercio.
10. La mitad de la edad de Pedro menos el doble de la edad de Luis es cien.
11. La suma del triple de un número y el cuadrado de otro número es ochenta.
12. La quinta parte de la edad de Pedro sumada con el triple de la edad de Luis.
13. El doble de la edad de Luis dentro de quince años más diez será ochenta.
14. El número de patas de conejos más el número de patas de pollo es cien.
15. La suma de los cuadrados de las mitades de dos números es siete.
16. Un sombrero costó ocho veces más que un pañuelo.
17. Un número más ocho.
18. El quintuplo de un número más la mitad de otro.
19. Tres menos dos veces un número.
20. El producto de dos y un número divido por nueve.
21. La quinta parte de un número disminuida en once.
22. La resta de dos números consecutivos.
23. La décima parte de un número más la sexta parte de otro.
24. Tres veces la suma de cinco y un número.
25. El doble de la resta de dos números.
26. La división por once de un número menos su octava parte.
27. La edad de Pedro dentro de once años.
28. El triple de la edad de Pedro hace tres años.
29. La mitad de la edad de Pedro.
30. Cinco veces la suma de las edades de Luis y Pedro.
31. La suma de la edad de Pedro hace seis años y la edad de Luis dentro de diez años.
32. Cuatro veces un número es igual a diez.
33. Al restar diez de un número el resultado es quince.
34. La edad de Pedro más la mitad de la edad de Luis es cien.
35. El triple de la suma de un número y diez es igual a doce.
36. La suma de las edades de Pedro hace cinco años y la de Luis dentro de ocho años es ciento cincuenta.
37. La suma de dos impares consecutivos es nueve.
38. El doble da la edad de Pedro de diez años será cincuenta.
39. La edad de Pedro hace doce años dividida por ocho.
40. La suma de un número y su mitad es treinta.
41. La suma de un número, su quinta parte y su novena parte es trece.

7. (a) Representado la edad actual de Eduardo por $x$. Expresar cada una de las siguientes frases en términos de la edad actual de Eduardo
   i. La edad de Eduardo dentro de tres años.

ii. La edad de Juana, si su edad es la mitad de la edad de Eduardo.
iii. La edad de Juana dentro de cinco años.
iv. La edad de Juana dentro de cinco años sustraída de la edad de Eduardo dentro de tres años.
v. La edad de Juana hace tres años.
vi. La edad de Eduardo dentro de seis años sumada a la edad de Juana ocho años antes.
vii. Tres veces la edad de Eduardo dentro de siete años.
viii. Cuatro veces la edad de Juana dos años antes.

(b) Representamos por $N$ la edad actual de Bárbara. Exprese el resultado en cada uno de los siguientes casos, usando este número como referencia.

i. La edad de Bárbara pasados siete años.
ii. Su edad dos años antes.
iii. Cinco veces a su edad siete años después.
iv. Tres veces su edad dos años antes.
v. Su edad seis años después sumada a su edad tres años antes.
vi. La mitad de la edad actual de Bárbara.

8. Escriba la negación de las siguientes proposiciones.

(a) p: “$-3$ es mayor que $-5$”
(b) q: “José es alto”
(c) s: “$4 = 3 + 2$”
(d) r: “3 es un número impar”
(e) f: “$2 + 3$ es un número positivo”
(f) g: “Maria no es mayor que Luisa”
(g) t: “5 no divide a 15”
(h) r: “En el salón hay más de 10 estudiantes”

9. Dadas las siguientes proposiciones

p : “2 es par” q : “2 es primo” r : “6 es múltiplo de 2”

Escriba en el lenguaje cotidiano cada una de las siguientes proposiciones simbólicas:

1. $p \wedge q$ 2. $\overline{r} \vee q$ 3. $(p \wedge q) \longrightarrow \overline{q}$ 4. $q \vee p$ 5. $\overline{q} \vee r$ 6. $r \longleftrightarrow p$

7. $r \longrightarrow (p \vee q)$

10. Simbolice las siguientes proposiciones

(a) “2 es mayor que 8 y no es menor que 3”.
(b) “5 no es primo o no es impar”.
(c) “Si $2 + 3 < 6$ entonces $2 < 3$”.
(d) “Si 2 es entero y par entonces 2 divide a 6”.
(e) “Si los elefantes vuelan entonces los animales hablan”.
(f) “4 es divisible por 2 si y solo si 4 es par”.
(g) “3 es primo y 5 es impar o primo”.
(h) “Si Neruda escribió Don Quijote entonces Neruda es chileno o venezolano”.
(i) “7 es primo y no es racional”.

(j) "4 no es impar ni primo".

(k) "Francisco Sanchez es nadador o es tenista".

(l) "El protón tiene carga positiva o el protón tiene carga negativa".

(m) "Si 2 es divisor de 8, entonces es par".

(n) "O el mercurio es un metal o el mercurio es un buen conductor de electricidad".

(o) "Si 9 es menor que 3, entonces 9 no es mayor que 5".

(p) "Una pieza de latón contiene 65 de cobre y 35 de zinc".

(q) "O el diámetro de un átomo de helio es aproximadamente de 2.0A, o la longitud de onda de rayo infrarrojo es de $7 - 8 \times 10^{-5}$ cm".

(r) "No es verdad que 4 no es par ni primo".

(s) "Si el mercurio hierve a 630°K entonces el punto de ebullición del mercurio es 375°C".

(t) "No es cierto que, 2 es primo y negativo".

(u) "Los elementos Mg y Fe son elementos representativos".

(v) "Las fórmulas de algunos hidruros de elementos representativos del II período son $B_eH_2$, $BH_3$, $CH_4$, $NH_3$, $H_2O$, HF".

11. Escriba la negación de las proposiciones dadas en el ejercicio 10

12. Despeje $x$ suponiendo que $a$, $b$ y $c$ son constantes positivas: **a)** $a(bx - c) \geq bc$; **b)** $a \leq bx + c < 2a$.

13. Despeje $x$ suponiendo que $a$, $b$ y $c$ son constantes negativas: **a)** $ax + b < c$; **b)** $\dfrac{ax+b}{c} \leq b$.

14. Demuestre que si $m > 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $mx + b < my + b$.

15. Demuestre que si $m < 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $mx + b > my + b$.

16. Demuestre que si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

17. Demuestre que si $a < 0$, $b < 0$ y $a < b$, entonces $a^2 > b^2$.

18. Demuestre que si $a < b$, entonces $a^3 < b^3$.

19. Demuestre que si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

20. Demuestre que si $a < b$ entonces $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

21. Demuestre que si $0 < a < b$ entonces $\dfrac{1}{\sqrt{a}} > \dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

22. Demuestre que si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, entonces $\dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{b^2}$.

23. Demuestre que si $a < 0$, $b < 0$ y $a < b$, entonces $\dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{b^2}$.

24. Demuestre que si $a < b$, entonces $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

25. Demuestre que si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, entonces $a^4 < b^4$.

26. Demuestre que si $a < 0$, $b < 0$ y $a < b$, entonces $a^4 > b^4$.

27. El número $\dfrac{1}{2}(a+b)$ se llama el **promedio** o **media aritmética** de $a$ y de $b$. Demuestre que la media aritmética de dos números está entre los dos números, es decir, demuestre que

$$a < b \qquad \text{implica que} \qquad a < \frac{a+b}{2} < b$$

28. El número $\sqrt{ab}$ se llama la **media geométrica** de dos números positivos $a$ y $b$. Pruebe que

$$a < b \qquad \text{implica que} \qquad a < \sqrt{ab} < b$$

29. Para dos números positivos $a$ y $b$. Demuestre que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

Esta es la versión más sencilla de una famosa desigualdad llamada **desigualdad de la media aritmética y la regla geométrica**.

30. Si $-6 \leq x \leq 3$, demuestre que $-1 \leq x^2 - 1 \leq 35$.

31. Si $0 \leq x \leq 2$, demuestre que $-4 \leq \dfrac{x+2}{x-3} \leq -\dfrac{2}{3}$.

32. Si $-2 < x \leq 0$, demuestre que $-\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{x+1}{4-x} \leq \dfrac{1}{4}$.

33. Si $1 \leq x \leq 5$, demuestre que $-1 \leq \dfrac{-2}{x^2+x} \leq -\dfrac{1}{15}$.

34. Si $-4 \leq x < 2$, demuestre que $1 < \sqrt{3-x} < 3$.

35. Marque con una $X$ la opción correcta

Comportamiento de la desigualdad

| Aplicación | Mantiene la desigualdad | Cambia la desigualdad |
|---|---|---|
| $m(\ )+b,\ m>0$ | | |
| $m(\ )+b,\ m<0$ | | |
| $(\ )^2$ para números positivos | | |
| $(\ )^2$ para números negativos | | |
| $(\ )^3$ | | |
| $(\ )^4$ para números positivos | | |
| $(\ )^4$ para números negativos | | |
| $\sqrt{(\ )}$ | | |
| $\sqrt[3]{(\ )}$ | | |
| $\dfrac{1}{(\ )}$ | | |
| $\dfrac{1}{(\ )^2}$ para números positivos | | |
| $\dfrac{1}{(\ )^2}$ para números negativos | | |
| $\dfrac{1}{\sqrt{(\ )}}$ | | |

36. Resolver las siguientes ecuaciones

1. $5x+3=2x-1$ 2. $\dfrac{3x}{5}+4=5x-\dfrac{4}{5}$ 3. $\dfrac{1}{a^2-4}+\dfrac{3}{a-2}=\dfrac{2}{a+2}$ 4. $\dfrac{3z+4}{5z+8}=\dfrac{3z-4}{5z+8}$

5. $16x^4-81=0$ 6. $2x^2+3x-5=0$ 7. $\dfrac{(t-2)\left(t^2-2t-15\right)}{t^2-3}=0$ 8. $\dfrac{a}{x+a}=\dfrac{x}{x^2-a^2}$

9. $\dfrac{5}{3t+2}=\dfrac{-2}{2t-1}$ 10. $\dfrac{a-1}{a^2+a}=\dfrac{1}{2a-2}$ 11. $\dfrac{3x^2-2x+4}{2-x}=1-2x$ 12. $\dfrac{2}{t+1}=\dfrac{t^2-t^3}{t^4+2}$

13. $x^3+\dfrac{1}{x}=2x$ 14. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3x}-\dfrac{3}{4}$ 15. $\dfrac{6t^2}{9t^2-1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3t-1}$ 16. $\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{2+x}$

37. Resuelva las siguientes ecuaciones literales

1. $(x+a)(x-b)=x^2-5x$ 2. $\dfrac{a}{x+a}=\dfrac{x}{x^2-a^2}$ 3. $t(3-3b)-1=t(2-3b)-b^2$

4. $az-a(a+b)=-z(1+ab)$ 5. $(v+b)(v-c)-(v+c)(v-2b)=c(b+2)+3b$

6. $\dfrac{x-3a}{a^2}-\dfrac{2a-x}{ab}=-\dfrac{1}{a}$ 7. $\dfrac{b}{d(x-b)}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ 8. $(z-b)^2-(z+b)^2=b(b-7z)$

9. $\dfrac{a}{z^2+2za+a^2}=\dfrac{a}{z^2+a^2}$ 10. $\dfrac{a}{2y}+\dfrac{a}{3y}+\dfrac{a}{y}=\dfrac{b}{3}$ 11. $\dfrac{x}{x+n}-\dfrac{4}{x^2-n^2}+\dfrac{4}{4x-4n}=0$

38. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

1. $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ -3x+y=5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-2y=0 \\ -x+y=3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 4x-6y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x-2y+7z=-2 \\ x+6y-3z=8 \\ 4y-2x+z=-10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-5y=8 \\ 2x+y=-10 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 5x-2y=5 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x+2y-z=10 \\ x+y+4z=-1 \\ 6x-2y+7z=11 \end{cases}$

39. Hallar y graficar el conjunto solución en cada caso

1. $4-3x>0$ 2. $5x+3<2x-1$ 3. $4x-3<2x+5$ 4. $\dfrac{1}{2}(x+2)-3<8x-1$

5. $3+2(2x-1)-(5-x)\leq x-15$ 6. $3\left(2-\dfrac{5t}{6}\right)\leq 6-\dfrac{t}{2}$ 7. $\dfrac{3t-1}{2}+\dfrac{t}{5}\leq 2t+\dfrac{3(1-t)}{10}$

8. $4-x^2\geq 0$ 9. $6x+x^2>-9$ 10. $2x^2-3x+6>0$ 11. $\dfrac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2+1\right)}{x}<0$

12. $x-\dfrac{5}{x}<4$ 13. $4(x+3)^2\geq 4$ 14. $2t^2+3t-5\geq 0$ 15. $\dfrac{x-1/2}{x-5}\geq\dfrac{3}{4}-\dfrac{3x+1}{4x}$

16. $x^2+x>0$ 17. $\dfrac{x+2}{x-5}\leq\dfrac{x}{x+3}$ 18. $\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+1}>1$ 19. $\dfrac{1}{a^2-4}+\dfrac{3}{a-2}\geq\dfrac{2}{a+2}$

20. $x^3-8\geq 0$ 21. $x^2-8x^5\leq 0$ 22. $42x^2-6x^4\geq 36$ 23. $(2x+5)^2-9<0$

24. $\dfrac{2x^2-5x+2}{\left(x^2-1\right)^2}<0$ 25. $x^3+3x^2\leq 13x+15$ 26. $\dfrac{2}{t+1}<\dfrac{t^2-t^3}{t^4+2}$ 27. $16x^4-81\leq 0$

28. $-1<2x-5<7$ 29. $4x<2x+1<3x+2$ 30. $(3x-4)(2x+3)>(x+2)(x-1)$

31. $2x-1\leq 5x-3\leq 9-3x$ 32. $x>1-x\geq 3+2x$ 33. $1-x\geq 3-2x\geq x-6$

34. $x^4+5x^3+5x^2-5x-6\geq 0$

40. Realice el estudio de signos de las siguientes expresiones y grafique los respectivos conjuntos soluciones.

1. $(x+3)^2$ 2. $x^3-27$ 3. $-x^2+x-10$ 4. $2x^4-x^3-6x^2$ 5. $2x^4+2x^2+\dfrac{1}{2}$

6. $\dfrac{x^3}{27}-8$ 7. $x^3-\dfrac{1}{x}$ 8. $\dfrac{x+5}{x^2+x-12}$ 9. $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{2+x}$ 10. $\dfrac{2+x}{3-x}-\dfrac{x}{1+x}$

11. $7t-9t^2$ 12. $8x^3+1$ 13. $\dfrac{(x-2)\left(x^2-2x-15\right)}{x^2-3}$ 14. $\dfrac{2x}{x^2-9}+\dfrac{x}{x^2+6x+9}-\dfrac{3}{x+3}$

15. $x^4-16$ 16. $4x^2+29x+30$ 17. $\dfrac{\left(x^2-4x+3\right)(x+3)}{x^4-81}$ 18. $\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-4x+3\right)$

19. $\dfrac{5}{x^2-4}-\dfrac{3-x}{4-x^2}$ 20. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+7}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x+1}$ 21. $\dfrac{x+3}{5-x}-\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{2x^2+30}{x^2-25}$

22. $\dfrac{x^3+x^2-12x}{x^2-3x}\cdot\dfrac{3x^2-10x+3}{3x^2+11x-4}$

41. Escribir la definición de valor absoluto para cada expresión dada y haga un esquema indicando como se divide la recta real con cada expresión

1. $|3x-4|$ 2. $\left|x^2-5\right|$ 3. $\left|3+x^2\right|$ 4. $\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$ 5. $\left|\dfrac{x+1}{8-x^3}\right|$ 6. $\left|\dfrac{x^3-4x}{(5-x)^3}\right|$

7. $\left|\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x}\right|$ 8. $\left|\dfrac{-x}{4-x^4}\right|$ 9. $\left|\dfrac{x^4+1}{3-x}\right|$ 10. $\left|\dfrac{x^4-1}{3x}\right|$ 11. $\left|\dfrac{x^4+5x^2+6}{(7-x)^2}\right|$

12. $\left|\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{2-x}\right|$ 13. $\left|\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}\right|$ 14. $\left|\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right|$

42. Hallar y graficar el conjunto solución en cada caso

1. $\left|3x^2-x-10\right|=0$ 2. $\left|x^3-2\right|=-2$ 3. $\left|\dfrac{x^2-4}{x+3}\right|=1$ 4. $\dfrac{\left|x^2-2\right|-x}{x}=0$

5. $2-|8x+3|=5$ 6. $\left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right|\leq 4$ 7. $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right|\geq\dfrac{1}{2}$ 8. $\left|\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}\right|<2$

9. $|3-5x|\leq 5-3x$ 10. $\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|\geq\dfrac{1}{x}$ 11. $\dfrac{|x-2|}{x}\leq 0$ 12. $\left|x^2-x\right|<|x+3|$

13. $|x+4|\leq|2x-6|$ 14. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}>2$ 15. $\sqrt{\dfrac{3x-9}{2x+4}}\geq 1$ 16. $\dfrac{|2x-3|-x}{x-2}\leq 1$

17. $|5x-1|=2$ 18. $\left|x-x^2\right|=-1$ 19. $\left|x^2+x\right|=2$ 20. $\left|\dfrac{x+2}{4-x}\right|=0$

21. $\left|\dfrac{7x-2}{4x-5}\right|=1$ 22. $1-\left|x^2-3\right|=6$ 23. $\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|=3$ 24. $\dfrac{\left|x^4+x^2+1\right|}{x^2+4}=-3$

25. $|x-4|<1$ 26. $\left|\dfrac{2-3x}{1+2x}\right|\leq 4$ 27. $\left|\dfrac{x}{2+x}\right|<1$ 28. $0<|x-5|<\dfrac{1}{2}$

29. $|x+5| \geq 2$ 30. $|2x+1| > 5$ 31. $|x| > |x-1|$ 32. $\left|1 - \frac{6x-2}{x-6}\right| > 2$

33. $\left|1 - \frac{2}{3}x\right| < 1$ 34. $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$ 35. $\left|\frac{1}{2}x - 5\right| > 3$ 36. $|2x-5| \leq |x+4|$

37. $1 \leq |x| \leq 4$ 38. $\left|x^3+1\right| < -3$ 39. $\frac{|x+3|}{|6-5x|} \leq 2$ 40. $|3x-6| \leq |4x+3|$

41. $\left|\frac{x-1}{2-x}\right| \geq 1$ 42. $|x-2b| < x+b$ 43. $\left|\frac{x-1}{2-x}\right| < 1$ 44. $\left|x^{10}-x\right| < -10$

45. $\left|\frac{x-3}{x+5}\right| \leq 1$ 46. $|x-1| < |x+4|$ 47. $\frac{|2x-5|}{|x-6|} \geq 3$ 48. $\left|x^2-2x-4\right| > 4$

49. $\left|\frac{-2x^2-4x-2}{x^2+x-2}\right| \leq 1$ 50. $\frac{x}{|x|} \geq -1$ 51. $\frac{|3x+2|-x}{2x+5} \leq 1$ 52. $\frac{\left|x^2+x+1\right|}{5x-1} < 0$

53. $|2x+4| - |x-1| \leq 4$ 54. $|x-3| + 2\,|x| < 5$ 55. $\frac{1}{|x|} < 1$ 56. $\frac{\left|9-x^2\right|+9}{|3x|} > 1$

57. $|1-2x| \leq 2 + |x|$ 58. $|x+2| + |x-2| \leq 12$ 59. $|x+2a| > |2x-a|\,, \quad a > 0$

43. Use la desigualdad triángular para demostrar cada desigualdad

$$(a) \quad |a-b| \leq |a| + |b| \qquad (b) \quad |a-b| \geq |a| - |b| \quad (c) \quad |a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$$

44. Suponga que $|x-2| < 0.01$ y $|y-3| < 0.04$. Demuestre que

$$|(x+y) - 5| < 0.05$$

45. Demuestre que las siguientes implicaciones son verdaderas

$$1. \quad |x-3| < 0.5 \implies |5x-15| < 2.5 \qquad 2. \quad |x+2| < 0.3 \implies |4x+8| < 1.2$$

$$3. \quad |x-2| < \epsilon/6 \implies |6x-12| < \epsilon \qquad 4. \quad |x+4| < \epsilon/2 \implies |2x+8| < \epsilon$$

46. Encuentre $\delta$ (que dependa de $\epsilon$) de modo que las siguientes implicaciones sean verdaderas

$$1. \quad |x-5| < \delta \implies |3x-15| < \epsilon \qquad 2. \quad |x-2| < \delta \implies |4x-8| < \epsilon$$

$$3. \quad |x+6| < \delta \implies |6x+36| < \epsilon \qquad 4. \quad |x+5| < \delta \implies |5x+25| < \epsilon$$

47. Demuestre que si $|x+3| < \frac{1}{2}$, entonces $|4x+13| < 3$

48. Use la desigualdad triángular y el hecho de que

$$0 < |a| < |b| \qquad \text{implica que} \qquad \frac{1}{|b|} < \frac{1}{|a|}$$

para establecer la siguiente cadena de desigualdades

$$\left|\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{|x|+2}\right| \leq \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{|x|+2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

49. Demuestre que

$$\left|\frac{x-2}{x^2+9}\right| \leq \frac{|x|+2}{9}$$

50. Demuestre que

$$|x| \leq 2 \qquad \text{implica que} \qquad \left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 15$$

---

## Respuestas: Ejercicios

1.1. F; 1.2. F; 1.3. F; 1.4. F; 1.5. F; 1.6. F; 1.7. V; 1.8. F; 1.9. F; 1.10. F; 1.11. F;

1.12. F; 1.13. F; 1.14. V; 1.15. F; 1.16. F; 2.1. $\left(x^2+1\right)(y-1)$; 2.2. $(z-x)\left(z^2+y\right)$;

2.3. $a(1-2x)(b-a)$; 2.4. $x(x-y)(3x+1)$; 2.5. $(a+b-z)(a-z)$; 2.6. $(a+b+c)(a-2)$; 2.7. $(x+y)(y-1)$;

2.8. $(x-y-z)(x+1)$; 2.9. $(m-n)(m+3p+1)$; 2.10. $(x+y)^2(a-b)$; 2.11. $(a+b)^2(b-3)$; 2.12. $(x+3)^2$;

2.13. $(2x-1)^2$; 2.14. $2(x+1)^2$; 2.15. $(x-y+3)(x+y+3)$; 2.16. $\left(x+a^2-1\right)\left(a^2-x+1\right)$; 2.17. $(z+1)(2-z)$;

2.18. $\left(x+y^2-3\right)\left(y^2-x+3\right)$; 2.19. $(y+3)(y-8)$; 2.20. $(w-3)(w+3)$; 2.21. $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$;

2.22. $(x-1)\left(x+x^2+1\right)$; 2.23. $(x+1)\left(x^2-x+1\right)$; 2.24. $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$; 2.25. $\left(\sqrt{2}-z\right)\left(\sqrt{2}+z\right)\left(z^2+2\right)$;

2.26. $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$; 2.27. $\left(x^2-2\right)^2$; 2.28. $\left(x^2+2x-1\right)(x-1)^2$;

2.29. $(y-1)\left(1+y+y^2+y^3+y^4\right)$; 2.30. $(z+2)\left(z^4-2z^3+4z^2-8z+16\right)$; 2.31. $(z-2)\left(8z+4z^2+2z^3+z^4+16\right)$;

2.32. $\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{2}x+1\right)\left(\sqrt[5]{16}x^4-\sqrt[5]{8}x^3+\sqrt[5]{4}x^2-\sqrt[5]{2}x+1\right)$; 2.33. $(1-x)(x+2)\left(x+x^2+1\right)\left(x^2-2x+4\right)$;

2.34. $\frac{1}{8}(x-6)\left(6x+x^2+36\right)$; 2.35. $\frac{1}{8}\left(x^2-6\right)\left(6x^2+x^4+36\right)$; 2.36. $\left(x^2-7x+2\right)$; 2.37. $x^2\left(x^2-x-1\right)$;

2.38. $(x-1)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$; 3.1. $1+4x$; 3.2. $\frac{3b-2}{b}$; 3.3. $\frac{xy}{2}$; 3.4.. $\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$;

3.5. $\frac{u^2+3u+1}{u+1}$; 3.6. $\frac{a^2}{b^2}$; 3.7. $\frac{x}{yz}$; 3.8. $\frac{y-1}{y+1}$; 3.9. $\frac{3x+7}{(x+5)(x-3)}$; 3.10. $\frac{rs}{3t}$; 3.11. $\frac{5x+10}{2x-2}$; 3.12. $\frac{2x^2+1}{2x^3}$;

3.13. $\frac{2b^2-3ab+4a^2}{a^2b^2}$; 3.14. $\frac{x^2-5x}{x+2}$; 3.15. $\frac{7}{5}$; 3.16. $\frac{b+a}{b}$; 3.17. $\frac{c}{c-2}$; 3.18. $\frac{2x+3}{x+2}$; 3.19. $\frac{13}{5}$; 3.20. 25;

3.21. $\frac{4}{5}$; 3.22. $-\frac{206}{81}$; 3.23. $-\frac{1}{3}$; 4.1. $h=\frac{2s}{b}$; 4.2. $R=\frac{L}{2\pi}$; 4.3. $h=\frac{3V}{\pi R^2}$; 4.4. $m_1=\frac{Fd^2}{km_2}$;

4.5. $a=\frac{V}{t}$; 4.6. $v_a=\frac{v_c}{R}$; 4.7. $a=\pm\sqrt{c^2-b^2}$; 4.8. $v_0=v_f-ta$; 4.9. $F=\frac{T}{d}$; 4.10. $F=\frac{P}{V}$; 4.11. $R=\frac{F_c}{mv_a^2}$;

4.12. $v_0=\sqrt{2gh_{max}}$; 4.13. $g=\frac{2h}{t^2}$; 4.14. $d_1=\frac{d_2h_1}{h_2}$; 4.15. $v_2=\frac{v_1d_1}{d_2}$; 4.16. $T_2=\frac{P_2v_2T_1}{P_1v_1}$; 4.17. $h=\frac{P}{dg}$;

4.18. $d=\frac{Pt}{F}$; 4.19. $b=\frac{2s-Bh}{h}$; 4.20. $d=\frac{v_f^2-v_0^2}{2g}$; 4.21. $I=\frac{V}{R}$; 4.22. $T=\frac{2\pi N}{v_a}$; 4.23. $t=\frac{Q}{0{,}24RI^2}$;

4.24. $\epsilon=\frac{lR_0-R_t}{tR_0}$; 4.25. $t=\frac{d}{v}$; 4.26. $v=\sqrt{\frac{2E_c}{m}}$; 4.27. $b=\frac{1}{2}P-h$; 4.28. $v_0=\frac{1}{t}\left(d-\frac{gt^2}{2}\right)$; 4.29. $d=2\frac{A}{D}$;

4.30. $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$; 4.31. $R_i=R_\epsilon-\frac{E}{I}$; 4.32. $F_2=\frac{F_1F}{F_1-F}$; 4.33. $l=\frac{V}{ah}$; 4.34. $t=\frac{100}{CR}I$; 4.35. $c=\frac{5}{9}F-\frac{160}{9}$;

4.36. $a_1=a_n-\frac{2s}{n}$; 4.37. $s=\frac{\rho}{R}$; 4.38. $R=\sqrt{\frac{kq}{E}}$; 4.39. $m=\frac{y-b}{x}$; 4.40. $a=\frac{T}{m_1+m_2}$; 4.41. $n=\frac{a_n-a_1+R}{R}$;

4.42. $\triangle t=\frac{S-S_0}{2\alpha S_0}$; 4.43. $m=\frac{2E}{2gh+v^2}$; 4.44. $\overline{x_2}=\frac{N_1(\overline{x_T}-\overline{x_1})+N_2\overline{x_T}}{N_2}$; 4.45. $m=\frac{2\triangle E_c}{v_2^2-v_1^2}$; 4.46. $\delta=\frac{L_T-L_0}{L_0\triangle t}$;

4.47. $a=\frac{F}{m}$; 4.48. $T_2=\frac{v+v_0(3\alpha T_1-1)}{3\alpha v_0}$; 4.49. $R_i=\frac{\omega-i^2tR_\epsilon}{i^2t}$; 4.50. $v_1=\frac{mv_2-F(t_2-t_1)}{m}$; 4.51. $t_1=t$;

5.1. $c=-10$; 5.2. $F=-31$; 5.3. $b=2$; 5.4. $x=-\frac{1}{3}$; 5.5. $R=3$; 5.6. $r=\sqrt{\frac{1256}{10\pi}}$; 5.7. $a_1=3$;

5.8. $a=5$; 5.9. $N=30$; 5.10. $T_2=\frac{186{,}846}{115}$; 12.*a*. $x\geq\frac{c(a+b)}{ab}$; 12.*b*. $\frac{a-c}{b}\leq x<\frac{2a-c}{b}$; 13.*a*. $x>\frac{c-b}{a}$;

13.*b*. $x\geq\frac{b(c-1)}{a}$; 36.1. $-\frac{4}{3}$; 36.2. $\frac{12}{11}$; 36.3. $-11$; 36.4. $\emptyset$; 36.5. $\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}$; 36.6. $-\frac{5}{2},\ 1$;

36.7. $2,\ -3,\ 5$; 36.8. $\frac{a^2}{a-1}$ si $a \neq 1$; 36.9. $\frac{1}{16}$; 36.10. $\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2},\ \frac{\sqrt{17}}{2}+\frac{5}{2}$; 36.11. $-2,\ -1$; 36.12. $\emptyset$;

36.13. $1,\ -1$; 36.14. $-\frac{2}{3}$; 36.15. $-\frac{4}{9}$; 36.16. $-6$; 37.1. $\frac{ab}{a-b+5}$; 37.2. $\frac{a^2}{a-1}$; 37.3. $1-b^2$;

37.4. $\frac{a^2+ab}{a+ab+1}$; 37.5. $\frac{-3b-2c}{2c-3b}$; 37.6. $2a$; 37.7. $\frac{b^2c-abcd+b^3d}{b^2d-acd}$; 37.8. $\frac{1}{3}b$; 37.9. $0$; 37.10. $\frac{11a}{2b}$;

37.11. $x=\frac{n-1-\sqrt{n^2-6n+17}}{2}$, $x=\frac{n-1+\sqrt{n^2-6n+17}}{2}$; 38.1. $x=-1,\ y=2$; 38.2. $x=-6,\ y=-3$;

38.3. $x=-2,\ y=-\frac{3}{2}$; 38.4. $x=\frac{47}{16},\ y=-\frac{13}{32},\ z=-\frac{5}{2}$; 38.5. $x=-3,\ y=-4$; 38.6. $x=3,\ y=1$;

38.7. $x=\frac{27}{19},\ y=\frac{20}{19}$; 38.8. $x=3,\ y=0,\ z=-1$; 39.1. $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$; 39.2. $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$; 39.3. $(-\infty,4)$;

39.4. $\left(-\frac{2}{15},\infty\right)$; 39.5. $\left(-\infty,-\frac{11}{4}\right]$; 39.6. $[0,\infty)$; 39.7. $\mathbb{R}$; 39.8. $[-2,2]$; 39.9. $(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$;

39.10. $\mathbb{R}$; 39.11. $(-\infty,-1)\cup(0,2)$; 39.12. $(-\infty,-1)\cup(0,5)$; 39.13. $(-\infty,-4]\cup[-2,\infty)$;

39.14. $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]\cup[1,\infty)$; 39.15. $(-\infty,-1]\cup\left(0,\frac{5}{4}\right]\cup(5,\infty)$; 39.16. $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; 39.17. $(-\infty,-3)\cup\left[-\frac{3}{5},5\right)$;

39.18. $\emptyset$; 39.19. $[-11,-2)\cup(2,\infty)$; 39.20. $[2,\infty)$; 39.21. $\left[\frac{1}{2},\infty\right)\cup\{0\}$; 39.22. $\left[-\sqrt{6},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{6}\right]$;

39.23. $(-4,-1)$; 39.24. $\left(\frac{1}{2},2\right)-\{1\}$; 39.25. $(-\infty,-5]\cup[-1,3]$; 39.26. $(-\infty,-1)$; 39.27. $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$;

39.28. $(2,6)$; 39.29. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$; 39.30. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)$; 39.31. $x=\frac{3}{2}$; 39.32. $\emptyset$; 39.33. $[2,3]$;

39.34. $(-\infty,-3]\cup[-2,-1]\cup[1,\infty)$; 40.1. Pos. $\mathbb{R}-\{-3\}$, Neg. $\emptyset$; 40.2. Pos. $(3,\infty)$, Neg. $(-\infty,3)$; 40.3. Neg. $\mathbb{R}$;

40.4. Pos. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,\infty)$, Neg. $\left(-\frac{3}{2},2\right)-\{0\}$; 40.5. Pos. $\mathbb{R}$; 40.6. Pos. $(6,\infty)$, Neg. $(-\infty,6)$;

40.7. Pos. $(-1,0)\cup(1,\infty)$, Neg. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$; 40.8. Pos. $(-5,-4)\cup(3,\infty)$,

40.9. Pos. $(-6,-2)\cup(2,\infty)$, Neg. $(-\infty,-6)\cup(-2,2)$; 40.10. Pos. $(-1,3)$, Neg. $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$;

40.11. Pos. $\left(0,\frac{7}{9}\right)$, Neg. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{7}{9},\infty\right)$; 40.12. Pos. $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$, Neg. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$;

40.13. Pos. $\left(-3,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},2\right)\cup(5,\infty)$, Neg. $(-\infty,-3)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup(2,5)$;

40.14. Pos. $(-\infty,-9)\cup(3,\infty)$, Neg. $(-9,3)-\{3\}$; 40.15. Pos. $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, Neg. $(-2,2)$;

40.16. Pos. $(-\infty,-6)\cup\left(-\frac{5}{4},\infty\right)$, Neg. $\left(-6,-\frac{5}{4}\right)$; 40.17. Pos. $(1,\infty)-\{3\}$, Neg. $(-\infty,1)-\{-3\}$;

40.18. Pos. $(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(3,\infty)$, Neg. $(-1,1)\cup(2,3)$; 40.19. Pos. $(-\infty,-2)\cup(2,8)$, Neg. $(-2,2)\cup(8,\infty)$;

40.20. Pos. $(1,\infty)$, Neg. $(-\infty,1)$; 40.21. Pos. $(-5,\infty)-\{5\}$, Neg. $(-\infty,-5)$; 40.22. Pos. $(3,\infty)$, Neg. $(-\infty,3)-\{0\}$;

42.1. $x=-\frac{5}{3},\ x=2$; 42.2. $\emptyset$; 42.3. $x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2},\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; 42.4. $x=1,\ x=2$; 42.5. $\emptyset$;

42.6. $\left(-\infty,-\frac{11}{2}\right]\cup\left[-\frac{5}{6},\infty\right)$; 42.7. $(-\infty,-3)\cup\left(-3,\frac{9}{11}\right]\cup\left[\frac{5}{3},\infty\right)$; 42.8. $(-1,0)$; 42.9. $[-1,1]$;

42.10. $(-\infty,0)\cup\left[\sqrt{3},\infty\right)$; 42.11. $(-\infty,0)\cup\{2\}$; 42.12. $(-1,3)$; 42.13. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup[10,\infty)$; 42.14. $\left(-\frac{7}{3},-2\right)$;

42.15. $(-\infty,-2)\cup[13,\infty)$; 42.16. $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]\cup(2,\infty)$; 42.17. $x=-\frac{1}{5},\ x=\frac{3}{5}$; 42.18. $\emptyset$; 42.19. $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$;

42.20. $x=-2$; 42.21. $x=1,\ x=\frac{7}{11}$; 42.22. $\emptyset$; 42.23. $x=-4,\ x=-\frac{2}{5}$; 42.24. $\emptyset$; 42.25. $(3,5)$;

42.26. $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right]\cup\left[-\frac{2}{11},\infty\right)$; 42.27. $(-1,\infty)$; 42.28. $\left(\frac{9}{2}.\frac{11}{2}\right)-\{5\}$; 42.29. $(-\infty,-7]\cup[-3,\infty)$;

42.30. $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$; 42.31. $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; 42.32. $\left(-\infty,-\frac{16}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{7},6\right)\cup(6,\infty)$; 42.33. $(0,3)$;

42.34. $\left(-\infty,\frac{10}{9}\right)\cup(2,\infty)$; 42.35. $(-\infty,4)\cup(16,\infty)$; 42.36. $\left[\frac{1}{3},9\right]$; 42.37. $[-4,-1]\cup[1,4]$; 42.38. $\emptyset$;

42.39. $\left(-\infty,\frac{9}{11}\right]\cup\left[\frac{5}{3},\infty\right)$; 42.40. $(-\infty,-9]\cup\left[\frac{3}{7},\infty\right)$; 42.41. $\left[\frac{3}{2},2\right)\cup(2,\infty)$; 42.42. $\left(\frac{b}{2},\infty\right)$; 42.43. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$;

42.44. $\emptyset$; 42.45. $[-1,\infty)$; 42.46. $\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$; 42.47. $\left[\frac{23}{5},6\right)\cup(6,13]$; 42.48. $(-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(4,\infty)$;

42.49. $\left[-\frac{5}{3},0\right]$; 42.50. $\mathbb{R}-\{0\}$; 42.51. ; $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup\left[-\frac{7}{6},\infty\right)$ 42.52. $\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$; 42.53. $\left[-9,\frac{1}{3}\right]$;

42.54. $\left(-\frac{2}{3},2\right)$; 42.55. $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; 42.56. $\mathbb{R}-\{-3,0,3\}$; 42.57. $[-1,3]$; 42.58. $[-6,6]$;

42.59. $\left(-\frac{a}{3},3a\right)$

## Bibliografía


1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.



**Cálculo Diferencial e Integral - La recta real.** Farith Briceño

Última actualizacón: Septiembre 2010 e-mail : farith_72@hotmail.com